ΘΕΜΑ Α

A1 Σχολικό βιβλίο, σελ. 31

A2 Σχολικό βιβλίο, σελ. 27

A3 Σχολικό, βιβλίο, σελ. 86

A4 Λ – Σ – Λ – Λ – Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1) $(3x - 1)(8x^2 - 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4}$

Είναι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ οπότε $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

άρα $\begin{cases} P(A \cap B) = \frac{1}{4} \\ P(A) = \frac{1}{3} \\ P(A \cup B) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Β2) $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B - A$

Άρα $P(A' - B') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

δηλαδή $P(A' - B') = P(B) - P(A \cap B)$ **(1)**

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$

$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$

$\boxed{P(B) = \frac{5}{12}}$

άρα από **(1)** έχουμε: $P(A' - B') = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A' - B') = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$

$P(\Delta) = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

δηλ. $\boxed{P(\Delta) = \frac{3}{4}}$

B3) $P(E) = P\big((A - B) \cup (B - A)\big)$ και επειδή $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$, έχουμε:

$$P(E) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

δηλ. $P(E) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, $\boxed{P(E) = \frac{1}{4}}$

B4) $9x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \text{ απορίπτεται} \\ x = \frac{2}{3} \text{ δεκτή} \end{cases}$

άρα $\boxed{P(\Gamma) = \frac{2}{3}}$

Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β,Γ είναι ασυμβίβαστα. Τότε θα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος, δηλαδή:

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12}$$

δηλ. $P(B \cup \Gamma) > 1$ άτοπο.

Άρα Β και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1) Από την υπόθεση προκύπτουν τα παρακάτω:

- $f_1\% = 10\%$
- $f_5\% = 30\%$
- $\alpha_3 = v_3 \frac{360^\circ}{V}$, $\alpha_3 = \frac{V_3}{V} \cdot 360^\circ$, $\alpha_3 = f_3 \cdot 360^\circ$

  άρα $f_3 = \frac{108}{360}$ $\boxed{f_3 = 0{,}3}$,

Αφού ισχύει $(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5)\% = 100\%$, τότε $f_2\% + f_4\% = (100 - 10 - 30 - 30)\%$.

Άρα $f_2\% + f_4\% = 30\%$ **(1)**

<u>Επίσης</u> $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i$ άρα:

$$14 = 9 \cdot \frac{10}{100} + 11 \cdot \frac{f_2}{100} + 13 \cdot \frac{30}{100} + f_4 \cdot \frac{15}{100} + 17 \cdot \frac{30}{100} \Leftrightarrow$$

$$14 \cdot 100 = 990 + 11f_2 + 15f_4$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{11f_2 + 15f_4 = 410}$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι: $f_2 = 0,1$ και $f_4 = 0,2$

δηλ. $f_2\% = 10\%$ και $f_4 = 20\%$

Γ2) $S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2 .\nu_i$

$S^2 = \sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2 \ \frac{\nu_i}{\nu}$

$S^2 = \sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X}) \ f_i$

Από τον πίνακα κατανομής έχουμε:

Κλάσεις	x_i	$f_i\,\%$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
[8,10)	9	10	-5	25
[10,12)	11	10	-3	9
[12,14)	13	30	-1	1
[14,16)	15	20	1	1
[16,18)	17	30	3	9

Άρα: $S^2 = 25 \cdot \frac{10}{100} + 9 \cdot \frac{10}{100} + 1 \cdot \frac{30}{100} + 1 \cdot \frac{20}{100} + 9 \cdot \frac{30}{100} \Leftrightarrow$

$S^2 = \frac{660}{100} = 6,6$

Άρα $S\sqrt{6,6} \simeq 2,57$, οπότε $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2,57}{14} = 0,184 > 0,1$

Δηλαδή το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3)

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i + x_5 \nu_5}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + x_5 \frac{\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + x_5 \cdot f_5 \Leftrightarrow 14$

$= \frac{1780}{\nu} + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow 14 - 5,1 = \frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow \frac{1780}{\nu} = 8,9 \Leftrightarrow \nu = \frac{1780}{8,9} \Leftrightarrow$ $\boxed{\nu = 200}$

Γ4) Είναι $\beta i \ \frac{1}{S_a} a_i - \frac{\bar{a}}{S_a}$, οπότε: $\bar{\beta} = \frac{1}{S_a} \ \bar{a} - \frac{\bar{a}}{S_a} = 0$ και $S_\beta = \left|\frac{1}{S_a}\right| \cdot S_a = \frac{1}{S_a} \cdot S_a = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Αφού Α εγγεγραμμένη γωνιά και $\hat{A} = 90^o$, άρα η ΒΔ είναι διάμετρος και από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο ΑΒΔ με ΑΒ = χ και ΑΔ = ψ προκύπτει:

$$\chi^2 + \psi^2 = (2\rho)^2 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 = 100 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \psi^2 = 100-\chi^2 \\ 0 \prec \chi \prec 10 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \psi = \sqrt{100-\chi^2}$$

Οπότε: (ΑΒΓΔ) = χ . ψ = $\sqrt{100-\chi^2}$, άρα: f(χ) = $\sqrt{100-\chi^2}$

Δ2) $f'(\chi) = \sqrt{100-\chi^2} + \chi\dfrac{-2\chi}{2\sqrt{100-\chi^2}} = \dfrac{2(100-\chi^2)-2\chi^2}{2\sqrt{100-\chi^2}} = \dfrac{200-4\chi^2}{2\sqrt{100-\chi^2}}$

οπότε: $f'(\chi) = \dfrac{100-2\chi^2}{\sqrt{100-\chi^2}}$

Αν $f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 = 50 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \chi = \pm 5\sqrt{2} \\ \chi \succ 0 \end{matrix}\right\} \chi = 5\sqrt{2}$, τότε για $\chi = 5\sqrt{2}$, έχω και $\psi = 5\sqrt{2}$ ..

		0	$5\sqrt{2}$
f΄	//////	+	-
f	//////	□	□

Άρα χ = ψ, και τότε το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+1)-\sqrt{99}}{98x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+1)-f(1)}{98x} = \frac{1}{98}\cdot f'(1) = \frac{1}{98}\cdot\frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Δ4) $0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \prec P^2(A) \le 1 \Leftrightarrow$

$-1 \le 1 - P^2(A) \le 0$

$100 - 1 \le 1 - P^2(A) \le 100$

Άρα $\sqrt{99} \le \sqrt{1-P^2(A)} \le 10$

και αφού $0 \prec P(A-B) \le 1$

τότε προκύπτει: $0 \le \dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le 1$.

Όμοια $0 \prec \dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \le 1$

Στο $(0,5\sqrt{2})$ η f είναι γνησίων αύξουσα, άρα

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \Leftrightarrow$$

$$P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)} \le P(A)\sqrt{100-P^2(A)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} f(P(A-B)) \le f(P(A)) \\ 0 \prec P(A) \le 1 \\ 0 \prec P(A-B) \le 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

P (A-B) $\le$P (A), που ισχύει αφού A - B$\subseteq$ A

<u>Επιμέλεια: Βίλη Μιχελάκου</u>